ЕРЕВАНСКИЙ ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

На правах рукописи

МХИТАРЯН МАРИНЕ АКОПОВНА

ПАРАЛЛЕЛЬНО-ПОТОЧНАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ФРЕДГОЛЬМА ВТОРОГО РОДА

Специальность: 05.13.16 – Применение вычислительной техники, математического моделирования и математических методов в научных исследованиях.

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

ЕРЕВАН – 1993

Работа выполнена в Ереванском Физическом Институте

Научный руководитель: член-корреспондент АН РА, доктор физико-математических наук НЕРСЕСЯН А. Б.

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук ПОГОСЯН Э. М. (ИПИА АН РА)

кандидат физико-математических наук БАДАЛЯН С. Г. (ЕрФИ)

Ведущая организация: ВЦ СО АН России

Защита состоится 22 июня 1993г. в 14⁰⁰ часов на заседании специализированного совета К 034.03.01. при Ереванском Физическом Институте (375036, г. Ереван, ул. Братьев Алиханянов, д. 2).

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Ереванского Физического Института.

Автореферат разослан 19 мая 1993 г.

Ученый секретарь специализированного совета, кандидат физико-математических наук Ананян С. Г.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ.

Актуальность темы. В последние годы стремительно развивается вычислительная физика /computational physics/, вбирая в арсенал расчетного инструментария суперЭВМ и другие коммуникационно-вычислительные структуры, разработанные на принципах параллельной обработки данных.

При проведении вычислительного эксперимента исследователи обычно приобретают большие системы либо арендуют на них машинное время. Значительная часть времени высококвалифицированных специалистов уходит на поиск оптимальных алгоритмов, но реализация их на компьютере с заданной архитектурой в редких случаях может оказаться оптимальной (и даже возможной).

В этом смысле вместо универсальных мощных ЭВМ предпочтительно использовать специализированные вычислительные системы, которые на определенных классах задач позволяют достигать максимально высокого (зачастую рекордного) быстродействия.

На сегодняшний день для решения задач вычислительной физики, требующих большого объема вычислений, разработано достаточно много параллельных вычислительных систем: мультипроцессор PAX, спецпроцессор DAP, система MOSES, ориентированная на решение систем нелинейных дифференциальных уравнений и предназначенная для решеточных моделей в теоретической физике, GF 11 и т. д.

С точки зрения приложений большой интерес представляет численное решение интегральных уравнений Фредгольма, к которым сводятся многие прикладные, и, в частности, физические задачи. Например, именно интегральные уравнения оказались эффективным и удобным аппаратом для создания наиболее общих алгоритмов численного решения различных дифракционных задач в рамках современного вычислительного эксперимента.

В работе [1] были предложены новые алгоритмы численного решения интегральных уравнений Фредгольма второго рода, в частности, выделен особый класс уравнений с ядрами теплицева типа. Реализация предложенных алгоритмов была осуществлена на последовательной ЭВМ с одним потоком команд и одним потоком данных [2], причем сами алгоритмы были изначально электромагнитных волн на идеально проводящей полосе, являющейся одной из основных моделей теории дифракции электромагниных волн. Вторая – контактная задача для сдвигового винклеровского основания, усиленного покрытием. Далее, в I главе, приведена классификация вычислительных структур по принципу того, как машинные команды увязываются с обрабатываемыми данными: вводятся основные понятия и определения из области параллельных вычислений: временной шаг работы вычислительной структуры, операционная сложность данного алгоритма: приводится также перечень матричных алгоритмов, поддающихся отображению на локально связные массивы на СБИС.

Для обеспечения высокой производительности вычислений на СБИС требуется широкое использование оптимального сочетания конвейерной и параллельной обработки. Конвейеризация и распараллеливание вычислителей являются определяющими свойствами функционирования всех параллельных ВС, в том числе и систолических структур, обладающих свойствами синхронности, модульности и регулярности, пространственной и временной локальности, конвейеризуемости.

Во 2 главе параллельно-поточно интерпретированы четыре алгоритма различной точности (порядка $O(h)$, $O(h^2)$, $O(h^4)$) приближенной треугольной факторизации интегрального оператора второго рода.

В частности, структура одного из алгоритмов точности $O(h^2)$ вычисления $R(i,j,n+1)$ такова (пусть $R(i,\ j,\ n) \stackrel{def}{=} R((i+\frac{1}{2})h,\ (j+\frac{1}{2})h,\ nh),\ i,\ j,\ n \in Z$):

/входные данные (начальное присваивание)/

for $0 \le i,\ j \le N-1$ do

$R(i,j,0)=K(i,j)$;

/внутренние вычисления/

for $0 \le n \le N-2$ do

for $1 \le i,\ j \le N-1$ do $(i,\ j \ge n+1)$

$$R(i,j,n+1):=R(i,j,n)+\frac{R(i,n,n)\,R(n,j,n)}{\frac{1}{h}-R(n,n,n)}; \qquad (1)$$

/выходные вычисления (финальное присваивание)/

for $1 \le n \le N-1$ do

begin

for $1 \le i,\ j \le N$ do $(i,\ j \ge n)$

begin $\alpha_{in}=R(i,n,n)$; $\beta_{nj}=R(n,j,n)$ end

end;

С вводом коэффициента $\alpha''=\frac{R(i,n,n)}{\sigma_n}$, где $\sigma_n=\frac{1}{h}-R(n,n,n)$, формула (I) запишется в виде

$$R(i,j,n+1)=R(i,j,n)+\alpha''R(n,j,n) \qquad (2).$$

Операционная сложность данного алгоритма $Q=\frac{N^3}{3}+O(N^2)$; а время последовательной его интерпретации на последовательной ЭВМ с одним потоком данных совпадает с его операционной сложностью $T_1=Q$.

Параллельно-поточная интерпретация данного алгоритма осуществляется на систолической структуре из N^2 процессорных элементов (Рис. Iа). Для управления обработки данных введены булевы переменные α, β, w, γ; q, r – внутренние регистры (i,j)-ого вычислителя (Рис. Iб). В начальный момент времени $r=R(i,j,0)$. Процессорные элементы, расположенные на главной диагонали ортогонального систолического массива, имеют регистр локальной памяти для запоминания $\frac{1}{h}$. Переменная γ служит для изменения режима работы каждого процессорного элемента в зависимости от стадии обработки задачи. Предполагается, что в исходном состоянии $\gamma=1$. Значения на входе ячейки помечены меткой in, на выходе – out. Пунктирные линии – управление, сплошные – данные. В течение всего вычислительного процесса подается

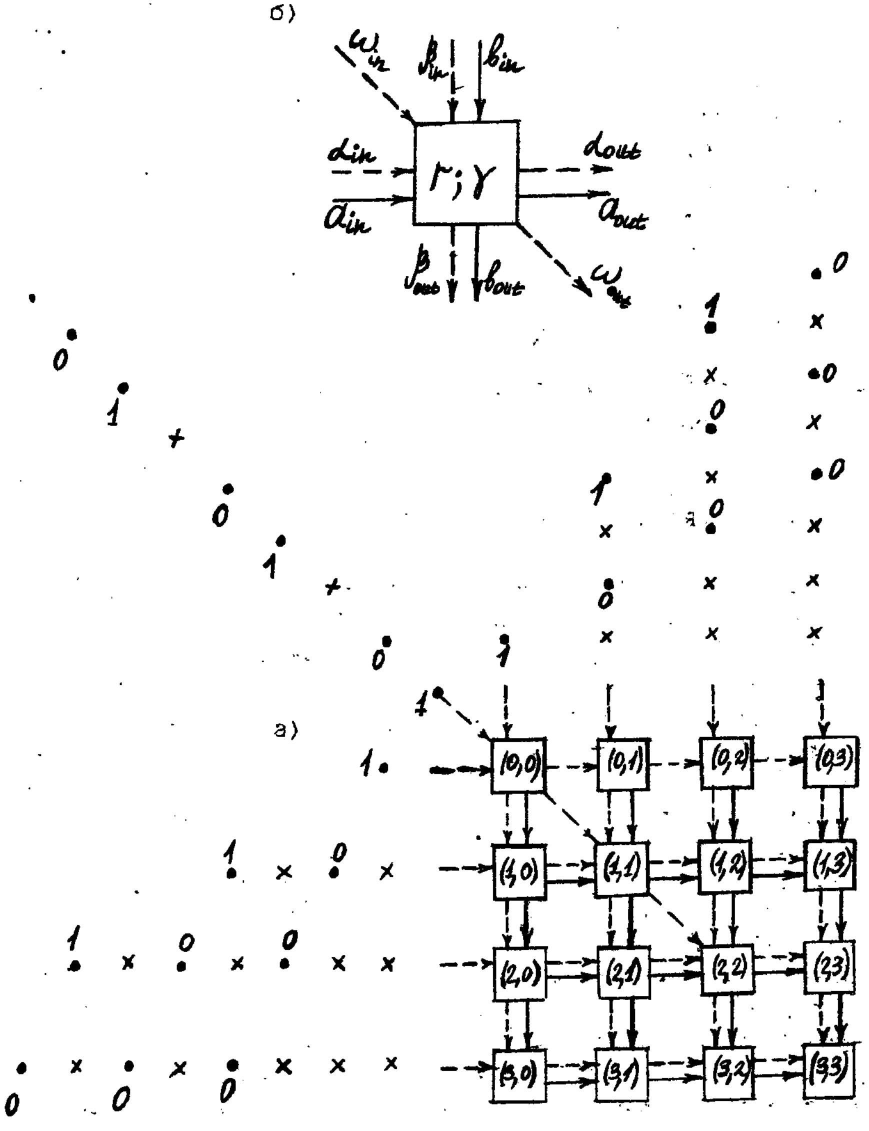

Рис. 1.

детерминированный поток нулей и единиц. Программа работы (i,j)-ого вычислителя такова:

if γ=1 then

begin

if w_{in}=1 then begin $q=\frac{1}{h}-r$; γ=1 end;

else

begin $q=q^{-1}$; $b_{out}=q$; $\alpha_{out}=\alpha_{in}$; $\beta_{out}=\beta_{in}$; $\gamma=0$; $q=0$ end;

if $\alpha_{in}=0$ then begin $\alpha_{out}=1$; $\gamma=0$; $q=rb_{in}$; $a_{out}=q$; $q=0$ end;

if $\beta_{in}=0$ then begin $\beta_{out}=1$; $\gamma=0$; $b_{out}=r$ end;

if $\alpha_{in}=\beta_{in}=1$ then begin $a_{out}=a_{in}$; $b_{out}=b_{in}$; $\alpha_{out}=\alpha_{in}$; $\beta_{out}=\beta_{in}$;

$q=r+a_{in}b_{in}$; $r=q$; $q=0$; $\gamma=1$ end

end

else

begin $\alpha_{out}=\alpha_{in}$; $\beta_{out}=\beta_{in}$; $w_{out}=w_{in}$; $\gamma=0$ end;

Управление обработки данных обеспечивает независимость данной вычислительной структуры от размера решаемой задачи. Время параллельно-поточной интерпретации данного алгоритма на систолическом массиве из N^2 ортогонально связанных процессоров равно $T_{N^2}=4N-3$, а коэффициент эффективности $K_{эф}=\frac{1}{12}$.

В третьей главе рассмотрены два алгоритма (точности $O(h)$ и $O(h^4)$) решения интегрального уравнения Фредгольма второго рода с ядром теплицева типа, удовлетворяющим уравнению

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial t}\right)K(x,t)=\sum_{k=1}^{m} p_k(x)q_k(t).$$

В частности, второй алгоритм точности $O(h^4)$ предназначен для решения интегрального уравнения с разностным ядром $K(x,t)=K(x-t)$.

Параллельную реализацию настоящих алгоритмов можно осуществить на цепи из $O(N)$ линейно связанных функциональных устройств, но при этом работа каждого из них будет усложнена подсчетом нескольких величин. Поэтому более целесообразно использовать вычислительную сеть, состоящую из нескольких цепей, каждая из которых предназначена для вычисления соответствующих величин, например, в случае первого алгоритма:

I цепь – $\Phi(i,n+1)$; $Q_k(i,n+1)$ $(1\le k\le m)$;

2 цепь – $\Phi_1(i,n+1)$ $(i>0)$;

3 цепь – $\Psi_1(i,n+1)$ $(i>0)$;

4 цепь – $\psi(i,n+1)$; $P_k(i,n+1)$ $(1\le k\le m)$; $y(i,n+1)$.

Для обоих алгоритмов представлены и описаны типы и функции процессоров, требования к локальной памяти вычислителей, подсчитаны времена и коэффициенты эффективности параллельно-поточной реализации на данных коммуникационно-вычислительных структурах, организовано управление обработки данных.

В заключении резюмируются основные результаты работы:

I. Проведена параллельно-поточная интерпретация алгоритма треугольной факторизации интегрального оператора второго рода точности $O(h)$ с операционной сложностью порядка $O(N^3)$ на систолической структуре из N^2+2N процессоров с временем реализации порядка $O(N)$.

2. Для двух алгоритмов (точности $O(h^2)$) треугольного разложения интегрального оператора второго рода с операционной сложностью порядка $O(N^3)$ предложены коммуникационно-вычислительные структуры из $O(N)^2$ процессоров с временем реализации порядка $O(N)$. Практически одинаковые коэффициенты эффективности ($\frac{I}{I2}$, $\frac{I}{I5}$) получены при операционной сложности одного алгоритма вдвое большей соответствующей величины другого алгоритма.

3. Параллельно-поточно интерпретирован подобный алгоритм точности $O(h^4)$ на систолическом массиве из $(N+1)^2$ вычислителей с временем реализации порядка $O(N)$. В этом случае получен самый высокий коэффициент эффективности ($K_{эф}\cong 0.23$) (и, вообще, все параметры предложенного варианта реализации максимальны) относительно таковых величин интерпретации алгоритмов факторизации интегрального оператора второго рода.

4. Алгоритм решения интегрального уравнения Фредгольма второго рода с ядром теплицева типа (точности $O(h)$ и с операционной сложностью $O(N^2)$) интерпретирован параллельно-поточно на цилиндрическом систолическом массиве из $4N+2$ процессорных элементов с временем реализации порядка $O(N)$. Данный алгоритм имеет самый высокий коэффициент эффективности

$$K_{эф}=\frac{m+\frac{5}{4}}{m+4}$$

по сравнению с подобными величинами исследуемых в работе алгоритмов, при $m=1$ $K_{эф}\cong 0.45$, а при $m\to\infty$ $K_{эф}\to 1$.

5. Реализация алгоритма решения интегрального уравнения второго рода с разностным ядром (точности $O(h^4)$ и с операционной сложностью порядка $O(N^2)$) осуществлена на систолической структуре из $4N+1$ функциональных устройств с временем реализации $O(N)$ и коэффициентом эффективности, практически равным таковому алгоритма одинаковой точности факторизации интегрального оператора.

6. В каждом из этих случаев организовано управление обработки данных в соответствующей вычислительной сети, что делает ее независимой от размера исходной задачи: описаны функции процессоров.

7. Техническая реализация представленных вычислительных структур на базе СБИС делает возможным их использование для быстрого счета прикладных, в частности, физических задач, сводимых к интегральным уравнениям Фредгольма второго рода.

ЛИТЕРАТУРА

I. Нерсесян А. Б. Новые алгоритмы численного решения интегральных уравнений второго рода. ДАН Арм. ССР., I989, т. 89, N 4, с. I74-I76.

2. Гарибян А. Б., Нерсесян А. Б. Численное решение интегральных уравнений Фредгольма второго рода с разностным ядром. Ереван, I990, деп. в АрмНИИНТИ 08. 0I. 90, N I-Ар. 90, 20 с.

3. Кун С. Матричные процессоры на СБИС. Москва, Мир, I99I.

4. Мхитарян М. А., Нерсесян А. Б. Параллельно-поточная интерпретация некоторых алгоритмов треугольного разложения интегральных операторов второго рода. Препринт ЕФИ-I224(I0)-90, I989, 2Iс. Сб: Тезисы I Всесоюзной конференции "Однородные вычислительные среды и систолические структуры", Львов, I990, т. I, с. I0I-I04.

5. Мхитарян М. А. Параллельно-поточная интерпретация двух алгоритмов решения интегрального уравнения Фредгольма второго рода с ядром теплицева типа. Ереван, I992, деп. в АрмНИИНТИ 27. 07. 92, N 25-Ар. 92, 52 с.

6. Мхитарян М. А. Параллельно-поточная интерпретация алгоритма решения интегрального уравнения Фредгольма второго рода с ядром теплицева типа. Доклады АН Армении, I992, т. 94 (в печати).

Технический редактор А. С. Абрамян

Подписано в печать 11.05.92
Офсетная печать.
Зак. тип № 137

Формат 80x84x16
Тираж 100 экз.

Отпечатано в Ереванском физическом институте
Ереван 36, ул. Бр. Алиханьян 2